

かも問一 10月まとめ

問題 1 : 座標平面上に点 $A(1, 0), B(-1, 0)$ がある.

点 P が $\angle APB = \frac{\pi}{3}$ を満たしながら動くとき, $AP + BP$ の最大値を求めよ.

(10月10日)

問題 2 : 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \left(x - \cos \frac{2\pi}{n} - i \sin \frac{2\pi}{n} \right) \left(x - \cos \frac{2 \cdot 2\pi}{n} - i \sin \frac{2 \cdot 2\pi}{n} \right) \cdots \left(x - \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} - i \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) dx$$

(10月11日)

問題 3 : 0 以上の整数 n に対して, $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx, J_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ とする.

(1) 次の極限を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nI_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nJ_n$$

(2) 数列 $\{I_n\}, \{J_n\}$ の一般項を求め, 無限級数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}$ の値を求めよ.

(3) 次の極限が 0 でない有限な値に収束するような整数 $M(n)$ を n を用いて表しなさい.
また, $M(n)$ をそのように取ったとき, その極限の値を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (M(n))! \cdot \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$$

(10月13日)

問題 4 : 次の極限を求めよ.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2n}{(n+k)(n+k-1)} \cdot \log \left(1 + \frac{2k}{n+k} \right)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log_2 \frac{n+k}{n+k-1} \cdot \sin \left(\pi \log_2 \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)$$

(10月14日)

問題 5 : xyz 空間で $z-x$ 平面上に, 放物線 $z = 1 - x^2 (0 \leq z \leq 1)$ の一部がある.

これを z 軸周りに 1 回転してできる曲面を K とする.

問: K を y 軸周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ.

(10月16日)

問題 6 : 次の定積分を求めよ.

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \log \left(\frac{1}{\tan x} - \tan x \right) dx$$

(10月17日)

問題 7 : a を正の実数とする. 座標平面上に 2 つの円

$$C_1 : (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = (a - \sqrt{2})^2$$

$$C_2 : (x + \sqrt{2})^2 + (y + \sqrt{2})^2 = (a + \sqrt{2})^2 \text{ がある.}$$

(1) C_1 と C_2 が共有点を持つような a の条件を求めよ.

(2) C_1 と C_2 の共有点の軌跡を求め図示せよ.

(10月18日)